ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ FİNAL SORULARI

1) $\tan z = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)} + i\dfrac{\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$ olduğunu ara işlemleri açıklayarak gösteriniz. **(10 puan)**

2) Her $z \in \mathbb{C}$ için $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}|z|$ olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

3) a) $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir dizi ise $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ dizisinin de sınırlı olduğunu gösteriniz.

b) $\left(\dfrac{n}{2n+1} + i\dfrac{n-1}{n}\right)$ dizisi $\mathbb{C}$ de sınırlı mıdır? Neden? **(15 puan)**

4) $f(z) = z^{1+i}$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi bulunuz. Nedenlerini açıklayınız. **(15 puan)**

5) $f(z) = \dfrac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kümeyi bulunuz. **(15 puan)**

6) $B = \{z = x+iy \,|\, 1 < \operatorname{Re}(z-1) < 3\}$ kümesini düzlemde çiziniz. B kümesinin açık, kapalı, bölge, sınırlı, bağlantılı olup olmadığını belirtiniz. **(15 puan)**

7) $f : D \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon, $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer $x+iy \in D$ için $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ ise o zaman

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını gösteriniz.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemini sağladığını gösteriniz. **(20 puan)**

Not: Sınav **18.06.2021** Cuma günü **09:00-11:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar **değerlendirilmeyecektir.** Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLERİ

1-) $\tan z = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)} + i \cdot \dfrac{\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$ olduğunu ara işlemleri açıklayarak gösteriniz.

Çözüm:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)}{\cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)}$$

$$= \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)} + i \cdot \frac{\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$$

2-) Her $z \in \mathbb{C}$ için $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{2}\,|z|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} \leq \sqrt{(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|)^2}$$

$$= |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$$

$$\Rightarrow |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \quad (1)$$

$$(|\mathrm{Re}\, z| - |\mathrm{Im}\, z|)^2 \geq 0 \Rightarrow |\mathrm{Re}\, z|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2 - 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| \geq 0$$

$$\Rightarrow |z|^2 \geq 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z|$$

$$\Rightarrow 2|z|^2 \geq 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| + |z|^2$$

$$\Rightarrow 2|z|^2 \geq (|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \quad (2)$$

(1) ve (2) den $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{2}\,|z|$ dir.

3-) a) $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir dizi ise $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ dizisinin de sınırlı olduğunu gösteriniz.

b) $\left(\frac{n}{2n+1} + i \cdot \frac{n-1}{n}\right)$ dizisi $\mathbb{C}$ de sınırlı mıdır? Neden?

Çözüm: a) (a_n) sınırlı olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ olacak şekilde $M>0$ vardır. O halde

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \frac{1}{n}\cdot n \cdot M = M$$

olup $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ dizisi sınırlıdır.

b) $$\left|\frac{n}{2n+1} + i \cdot \frac{n-1}{n}\right| = \sqrt{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olduğundan $\left(\frac{n}{2n+1} + i \cdot \frac{n-1}{n}\right)$ dizisi $\mathbb{C}$ de sınırlıdır.

4-) $f(z) = z^{1+i}$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi bulunuz. Nedenlerini açıklayınız.

Çözüm: Önce türevlenebilir olduğu kümeyi bulalım.

$$z^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Log} z} = e^{(1+i)(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu küme

$$D = \mathbb{C} - \{(x+iy : x \leq 0,\ y=0\}$$ olup $D^\circ = D$ dir.

Bu durumda f fonksiyonunun analitik olduğu küme

$$A = \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0,\ y=0\}$$

dır.

5-) $f(z) = \dfrac{x-1-iy}{(x-1)^2+y^2}$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: $f(z)$ nin tanım kümesi $T = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ olduğundan $D_0 = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ dır.

$f(z)$ nin sürekli olduğu küme $D_1 = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ dır.

$$u(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$u_x = -\frac{2(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \quad u_y = -\frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}, \quad v_y = -\frac{(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

kısmi türevleri $D_2 = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ da var ve süreklidir.

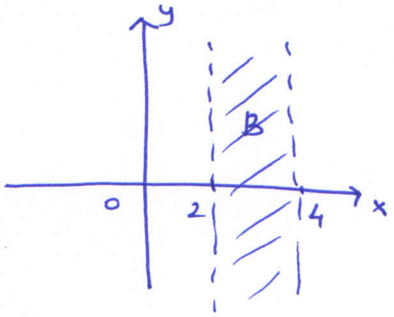
$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ olup Cauchy - Riemann denklemleri $D_3 = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ da sağlanır.

$D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{C} - \{(1,0)\}$ f nin türevlenebilir olduğu kümedir. Bu kümedeki türevi $f'(z) = u_x + iv_x = -\dfrac{2(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} + i.\dfrac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}$ olarak bulunur.

6-) $B = \{z = x+iy \mid 1 < Re(z-1) < 3\}$ kümesini düzlemde çiziniz. B kümesinin açık, kapalı, sınırlı, bağlantılı olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm: $z = x+iy \Rightarrow z-1 = (x-1)+iy \Rightarrow Re(z-1) = x-1$

$$B = \{z = x+iy : 1 < x-1 < 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 4,\ y \in \mathbb{R}\}$$



$\forall (x_0,y_0) \in B$ için $B((x_0,y_0),r) \subset B$ olacak şekilde bir $r>0$ var olduğundan B açık kümedir.

B kümesi açıktır, kapalı değildir, bölgedir, sınırlı değildir, bağlantılıdır.

7) $f: D \to \mathbb{C}$ bir analitik fonksiyon, $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun.

Eğer $x+iy \in D$ için $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$

ise o zaman

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ Cauchy-Riemann denklemlerini

sağladığını gösteriniz.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm: a) f analitik olduğundan $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$

limiti $\forall z = x+iy \in D$ için vardır.

$h \to 0$, reel ve sanal eksen boyunca yaklaştığında da limit vardır.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}$$

$h \to 0$ iken limit alınırsa

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

$ih \to 0$, h reel iken,

$$\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \frac{f(x+i(h+y)) - f(x+iy)}{ih}$$

$$= -i \cdot \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h}$$

limite geçildiğinde

$$f'(z) = -i\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) nin eşitliğinden $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

elde edilir.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$